



Московский государственный технический университет
Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Программа учебной дисциплины «Математическое основы ТАУ»

для подготовки магистров по направлению
24.04.04 «Управление в технических системах»

Автор программы: Андрей Леонидович Масленников,
ст. преп. кафедры «Системы автоматического управления»

Email: andrey.L.maslennikov@yandex.ru

Группа в VK: <http://vk.com/amas.bmstu>

Учебные материалы: <https://yadi.sk/d/fZrN7FsY3RudeU>

Москва, 2019.

Аннотация

Дисциплина посвящена повторению разделов высшей математики, применяемых в задачах автоматического управления. В рамках курса рассматриваются вопросы векторно-матричных преобразований, свойств матриц, основные виды интегральных преобразований, основные виды числовых и функциональных рядов, методы линеаризации нелинейных систем, спектральные характеристики сигналов, алгоритмы построения спектров сигналов, основные виды оконных функций, а также, элементы теории вероятности, математической статистики и анализа стохастических процессов.

Структура дисциплины

Модуль 1. Детерминированный математический аппарат.	
#01	Дифференциальные и разностные уравнения.
#02	Численные методы векторно-матричных преобразований.
#03	Численные методы матричных разложений.
#04	Числовые и функциональные ряды.
#05	Интегральные преобразования.
#06	Устойчивость.
#07	Линеаризация нелинейных систем.
ДЗ #1	Домашнее задание по материалам первого модуля.
#08	Рубежный контроль №1.
Модуль 2. Спектральные характеристики сигналов и анализ стохастических процессов.	
#09	Спектр сигнала. Алгоритм построения спектра.
#10	Характеристики сигналов во временной и частотной областях.
#11	Основы теории вероятности.
#12	Случайные переменные и их свойства.
#13	Случайные переменные и их свойства.
#14	Стохастические процессы и их характеристики.
#15	Стохастические процессы и их характеристики.
ДЗ #2	Домашнее задание по материалам второго модуля.
#16	Рубежный контроль №2.

Вопросы для подготовки к РК1

1. Дифференциальные уравнения. Типы дифференциальных уравнений. Порядок дифференциальных уравнений. Задача Коши. Виды дифференциальных уравнений. Свойства дифференциальных уравнений.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Система обыкновенных дифференциальных уравнений. Каноническая и нормальная системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Общее и частное решение однородной нормальной линейной системы дифференциальных уравнений. Общее решение неоднородной нормальной линейной системы дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных. Формула Коши. Фундаментальная матрица решений и методы ее вычисления.
4. Примеры обыкновенных дифференциальных уравнений. Практический смысл и использование. Закон радиоактивного распада. Осцилятор Ван дер Поля.
5. Нелинейные дифференциальные уравнения и методы их решения. Метод последовательных приближений. Метод ломанных Эйлера. Метод степенных рядов. Метод понижения порядка. Метод фазовой плоскости.
6. Дифференциальные уравнения в частных производных. Примеры дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение теплопроводности. Уравнение колебаний струны. Уравнение Навье-Стокса. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Уравнение Пуассона.
7. Методы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Метод конечных разностей. Метод конечных элементов. Метод конечных объемов.
8. Решетчатые функции. Конечные разности. Разностные уравнения. Виды разностных уравнений. Методы решения разностных уравнений.
9. Матрицы. Виды матриц. Унитарная матрица. Эрмитова матрица. Обратная матрица. Минор и алгебраические дополнения матрицы. Взаимная матрица. Вырожденная матрица. Экспоненциальная матрица. Положительная и отрицательная определенность матриц.
10. Векторно-матричные операции. Детерминант. Ранг матрицы. Нормы матрицы. След матрицы.
11. Численные методы векторно-матричных преобразований. Вычисление обратных и псевдо-обратных матриц. Вычисление собственных векторов и собственных значений матриц. Сигнулярные значения и сингулярные векторы матрицы.
12. Разложение (декомпозиция) матриц. Спектральное разложение, LU-разложение, LL-разложение (разложение Холецкого), QR-разложение, разложение матрицы в форму Жордана, разложение Шура, сингулярное разложение (SVD).
13. Числовые ряды. Частичная сумма числового ряда. Сходимость числовых рядов. Абсолютная сходимость числовых рядов. Признаки Даламбера, Коши и Раабе для оценки сходимости знакоположительных рядов.
14. Функциональные ряды. Частичная сумма функционального ряда. Сходимость функциональных рядов. Равномерная и поточечная сходимость функциональных рядов. Абсолютная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса оценки сходимости функциональных рядов.
15. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Ряд Тейлора. Сходимость ряда Тейлора. Оценка радиуса сходимости ряда Тейлора по формуле Даламбера. Ряд Лорана.

16. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье. Ряд Винера. Ряд Вольтерры.
17. Интегральные преобразования. Виды интегральных преобразований. Применение интегральных преобразований.
18. Интегральное преобразование Лапласа. Свойства интегрального преобразования Лапласа. Физический смысл интегрального преобразования Лапласа. Решение задачи Коши через преобразование Лапласа. Связь интегрального преобразования Лапласа с интегральным преобразованием Фурье и Z-преобразованием.
19. Математическая модель дискретного сигнала. Дискретное преобразование Лапласа. Z-преобразование. Свойства Z-преобразования. Область сходимости Z-преобразования. Решение разностных уравнений с использованием Z-преобразования.
20. Преобразования Фурье. Виды и отличительные особенности. Быстрое преобразование Фурье. Связь преобразований Фурье с рядом Фурье.
21. Непрерывное преобразование Фурье. Непрерывное преобразование Фурье для дискретного времени. Дискретное преобразование Фурье. Квантование частоты.
22. Оконное преобразование Фурье. Виды и назначение оконной функции. Пример использования оконной функции.
23. Устойчивость по Ляпунову. Физический смысл устойчивости по Ляпунову. Асимптотическая и экспоненциальная устойчивости по Ляпунову и их физический смысл.
24. Методы оценки устойчивости систем дифференциальных уравнений. Первый метод Ляпунова. Второй метод Ляпунова. Определение устойчивости и асимптотической устойчивости по второму методу Ляпунова.
25. Устойчивость динамических систем. Устойчивость от входа к выходу. Связь устойчивости от входа к выходу и недостатки данного подхода. Критерии устойчивости линейных динамических систем (как непрерывных, так и дискретных). Классификация и общие формулировки.
26. Линеаризация нелинейных функционалов и систем. Необходимость применения. Линеаризация нелинейных функционалов в ряд Тейлора. Линеаризация динамических систем в ряд Тейлора при получении описания системы в переменных состояния.
27. Метод гармонической линеаризации. Практическое назначение. Постановка задачи и механизм линеаризации.
28. Линеаризация обратной связью. Основная идея метода. Математический подход к решению задачи. Производные Ли.

Вопросы для подготовки к РК2

1. Спектр сигнала. Амплитудный и фазовый спектры. Графическое изображение спектра сигналов. Двусторонний и односторонний спектры.
2. Алгоритм построения амплитудного спектра. Необходимость использования оконной функции и удаление среднего. Влияние разрешения по частоте на точность вычисляемого спектра. Эффект наложения спектров (частот).
3. Теорема Котельникова-Найквиста-Шеннона. Частота Найквиста.
4. Характеристики сигнала во временной и частотной областях. Энергия и мощность сигнала. Спектральные плотности энергии и мощности сигнала. Равенство Парсевала. Соотношение сигнал-шум.
5. Случайный эксперимент. Тест. Исход. Множество исходов. Случайное событие. Пространство элементарных событий. Несовместные, равновероятные и независимые события.
6. Вероятность. Четыре определения вероятности. Условная вероятность. Формула Байеса. Полная вероятность.
7. Случайные переменные. Виды случайных переменных. Функции, используемые для описания случайных переменных. Функция вероятности и ее свойства. Функция распределения вероятности и ее свойства. Функция плотности распределения вероятности и ее свойства.
8. Характеристики случайных переменных. Математическое ожидание и его свойства, медиана, мода, дисперсия и ее свойства. Робастность оценки среднего. Статистические моменты n -ого порядка. Неравенства Маркова и Чебышева.
9. Основные законы распределения дискретных случайных переменных (распределение Бернулли, биномиальное распределение, геометрическое распределение, распределение Пуассона).
10. Основные законы распределения непрерывных случайных переменных (нормальное распределение, равномерное распределение, экспоненциальное распределение, распределение Хи-квадрат).
11. Комбинация двух случайных переменных. Совместные и безусловные функции вероятности, функции распределения вероятности, функции плотности распределения вероятности.
12. Корреляция, ковариация и линейный коэффициент корреляции двух случайных величин. Ортогональность, независимость и некоррелируемость двух случайных переменных.
13. Векторные случайные переменные. Поэлементные математическое ожидание и дисперсия. Корреляционная и ковариационная матрицы. Совместные и безусловные функции вероятности, функции распределения вероятности и функции плотности распределения вероятности.
14. Сумма случайных переменных. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных переменных.
15. Последовательность случайных переменных. Векторный и скалярный случай последовательности случайных переменных.
16. Понятие сходимости. Сходимость к константе, сходимость всюду, сходимость почти всюду, сходимость по вероятности (по мере), сходимость в распределении, среднеквадратичная сходимость.

17. Понятие статистической выборки. Полная и репрезентативная выборка. Выборочное среднее, дисперсия полной выборки и дисперсия репрезентативной выборки. Алгоритм расчета статистических характеристик в режиме реального времени.
18. Законы больших чисел. Слабый и сильный законы больших чисел. Центральная предельная теорема.
19. Стохастический процесс. Реализация стохастического процесса. Совместная функция вероятности, совместная функция распределения вероятности и совместная функция плотности распределения вероятности для элементов стохастического процесса. Случайная переменная в составе стохастического процесса.
20. Математическое ожидание и дисперсия стохастического процесса. Автокорреляционная и автоковариационная функции.
21. Взаимнокорреляционная и взаимноковариационная функции, коэффициент корреляции двух стохастических процесса. Ортогональность, некоррелируемость и независимость двух стохастических процессов.
22. Стохастические процессы с независимыми приращениями. Независимые и одинаково распределенные стохастические процессы. Стационарные, совместно стационарные и стационарные в широком смысле стохастические процессы.
23. Свойства корреляционной функции стационарных в широком смысле стохастических процессов.
24. Стохастическое блуждание. Гауссовский стохастический процесс. Винеровский стохастический процесс. Пуассоновский стохастический процесс. Сходства и различия винеровского и пуассоновского стохастических процессов.
25. Производные стохастических процессов. Среднеквадратичная производная. Производная винеровского стохастического процесса.

Список основной литературы

1. Белов С.А., Злотых Н.Ю. Численные методы линейной алгебры. Лабораторный практикум. И.: Нижегородский государственный университет, 2005, 58 с.
2. Воеводин В.В., Кузнецов А.Ю. Матрицы и вычисления. И.: Наука, 1984, 320 с.
3. Волков И.К., С.М. Зуев, Г.М. Цветкова. Случайные процессы. Учебник для вузов. И.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 1999, 448 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. 9-е издание. И.: Высшая школа, 2003, 479 с.
5. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. пер. с англ. Х.Д. Икрамова. И.: Мир, 2001, 430 с.
6. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления. В трех томах. 2-ое издание, дополненное. И.: Высшая школа, 1977, 320 с.
(в 2008 году вышло 3-е издание, которого в цифровом виде нет).
7. Певзнер Л.Д., Чураков Е.П. Математические основы теории систем. Учебное пособие. И.: Высшая школа, 2009, 503 с.
8. Leon-Garcia A. Probability, statistics, and random processes for electrical engineering. 3rd edition. Pearson Education, 2017, 818 p.